Ａ．質点系の力学

■準備　大きさをもたず質量だけをもつ仮想的物体を**質点**という．質点は硬い小球を理想化したものと考えてよい．運動を考える限り質点の属性は基本的には（慣性）**質量**（m）のみであり，質点の運動は**位置**（$\boldsymbol{r} = (r_x, r_y, r_z)$）の時間（$t$）依存性として記述できる．位置は 3 次元空間のベクトルであり，大きさと方向をもつ．同じ時刻に同じ位置にある二つの質点が異なる運動を行うことは可能であるから，t と $\boldsymbol{r}$ だけでは運動を記述できない．そこで t の関数として**速度** $\boldsymbol{v}$ を指定しておく必要がある．速度もベクトルである．速度と位置は時間微分

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dr_x}{dt}, \frac{dr_y}{dt}, \frac{dr_z}{dt}\right) \tag{A.1}$$

により結びついている．速度の時間あたりの変化量

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2r_x}{dt^2}, \frac{d^2r_y}{dt^2}, \frac{d^2r_z}{dt^2}\right) \tag{A.2}$$

を**加速度**という．加速度もまたベクトルである．

■運動の法則と運動量　外力によって質点に運動を与え，また，運動の様子を変化させることができる．経験によれば**力**（$\boldsymbol{F}$）に比例して加速度が生じる．このとき質量が大きいほど運動の様子は変化しにくい．運動の様子が変化しにくいことを**慣性**という．経験事実を式で書くと

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{A.3}$$

である．これを**運動の法則**という．式(A.3)を**運動方程式**ともいう．力もベクトルである．

運動の法則は力が働かなければ，質点の速度は変化しないことを表している．すなわち，力が働かなければ質点は等速直線運動をする．このとき，$m\boldsymbol{v}$ は一定である（**保存する**）．$m\boldsymbol{v}$ を**運動量**という．ここで速度（v）ではなくわざわざ運動量に注目するのは，この運動量は，後に示す通り複数の質点が互いに相互作用しても保存するからである．運動量を使うと，運動の法則［式(A.3)］は

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{A.4}$$

とも表せる．

質点の場合は大きさが無いため考える必要が無いが，一般には，力はどこに作用しているか（**作用点**はどこか）によって物体の運動に異なる影響を及ぼす．

■仕事とエネルギー　力（$\boldsymbol{F}$）と移動量（$\boldsymbol{l}$）をかけた量を**仕事**（W）という．力が移動の間一定なら

$$W = \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{l} \tag{A.5}$$

である．

式(A-3)の両辺に速度 $\boldsymbol{v}$ をかけて**内積**をとると

$$\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{a} \tag{A.6}$$

である．$\boldsymbol{F}$ が時間によらないという条件で，これを時刻 t_1 から t_2 まで積分する．ただし，このとき移動量が $\boldsymbol{l}$ であるとする．

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}^2 = 2\,\boldsymbol{v} \bullet \frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{a} \tag{A.7}$$

であることに注意すると

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{l} = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2}m\left[v(t_2)\right]^2 - \frac{1}{2}m\left[v(t_1)\right]^2 \tag{A.8}$$

となる．時刻の関数 $\boldsymbol{l}(t)$あるいは $W(t)$を考えると

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 + W(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 + \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{l}(t) \tag{A.9}$$

が時間によらず一定にとどまることを意味する．この量を**エネルギー**という．また $mv^2/2$ を質点の**運動エネルギー**という．さらに，この場合，W は**ポテンシャルエネルギー**（**位置エネルギー**）になっている．一般に，外部から力を受けていない系（**孤立系**）では運動エネルギーは保存する．

■ポテンシャル　質点に働く力 $\boldsymbol{F}$ が時間によらず位置だけの関数であって，ある関数 $U = U(\boldsymbol{r})$の偏微分（付録 B）により

$$\boldsymbol{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial r_x}, \frac{\partial U}{\partial r_y}, \frac{\partial U}{\partial r_z}\right) = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\nabla U \tag{A.10}$$

と表すことができるとき，U の値の変化速度は

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{F} \tag{A.11}$$

である．したがって，式(A.6)を使うと

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)+\frac{dU}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2+U\right)=0 \tag{A.12}$$

となり，運動エネルギーと U の和は時間変化しない．このような関数 U を**ポテンシャル**という．U はその時刻におけるポテンシャルエネルギーになっていて，式(A.12)は（力学的）**エネルギーの保存**を表している．

代表的なポテンシャルとして重力ポテンシャルや電気的なポテンシャル（静電ポテンシャル）がある．いずれも

$$U(\boldsymbol{r})=-\frac{A}{r} \tag{A.13}$$

という形をもつ．ここで r は $\boldsymbol{r}$ の絶対値である．この場合，位置 $\boldsymbol{r}$ における力は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\nabla U(\boldsymbol{r})=-\frac{A}{r^2}\nabla\boldsymbol{r}=-\frac{A}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{A.14}$$

となり，常に位置ベクトルと平行な力を与える．これを**中心力**という．

■**角運動量**　もう一つの保存則を得るために，運動方程式(A.4)の両辺について $\boldsymbol{r}$ との**ベクトル積（外積）**を作り，時間について積分する．

$$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\,dt=\int_{t_2}^{t_1}\boldsymbol{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}\,dt \tag{A.15}$$

である．右辺を部分積分すると

$$\int_{t_2}^{t_1}\boldsymbol{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}\,dt=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}-\int_{t_2}^{t_1}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{p}\,dt=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}-\int_{t_2}^{t_1}m\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}\,dt=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{A.16}$$

となる．$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ を**角運動量**という．式(A.15)の左辺が $\mathbf{0}$ であれば，角運動量は保存する．式(A.15)の左辺が $\mathbf{0}$ になるのは力が働いていない場合と，力が常に位置ベクトルと平行な場合である．後者は重力や静電引力などの中心力が働いている場合に相当する．

■**作用・反作用の法則**　二つの質点 A と B が相互作用するとき，A は B から力（$\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}\leftarrow\mathrm{B}}$）を受け，B は A から力（$\boldsymbol{F}_{\mathrm{B}\leftarrow\mathrm{A}}$）を受ける．経験によればこの二つの力は，いつも互いに逆向きで大きさは等しい．

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{B}\leftarrow\mathrm{A}}=-\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}\leftarrow\mathrm{B}} \tag{A.17}$$

これを**作用・反作用の法則**という．これと式(A.3)から

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{p}_{\mathrm{B}} = 0 \tag{A.18}$$

および

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} \times \boldsymbol{p}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} \times \boldsymbol{p}_{\mathrm{B}} = \mathbf{0} \tag{A.19}$$

である．内部で相互作用があっても，外部から力が働かなければ運動量や角運動量が保存することを示している．

■二体系の運動方程式　互いに相互作用する二つの質点 A と B を考えると，運動方程式は

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}\leftarrow\mathrm{B}} = m_{\mathrm{A}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{A}} \quad \text{および} \quad \boldsymbol{F}_{\mathrm{B}\leftarrow\mathrm{A}} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}\leftarrow\mathrm{B}} = m_{\mathrm{B}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{B}} \tag{A.20}$$

となる．二つの運動方程式の和は

$$0 = m_{\mathrm{A}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{B}} \tag{A.21}$$

である．**重心（慣性中心）**を

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_{\mathrm{A}}\mathbf{r}_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\mathbf{r}_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} \tag{A.22}$$

で定義すると，式(A.21)は

$$0 = (m_A + m_B)\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \tag{A.23}$$

と変形できるから，重心が等速直線運動をすることがわかる．これは質点がいくつあっても同じで，作用・反作用の法則のため，外力が働かなければ重心

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{A.24}$$

は常に等速直線運動をする．

一方，式(A.20)の二式をそれぞれ m_{A} と m_{B} で割ってから差をとると

$$\left(\frac{1}{m_{\mathrm{A}}} + \frac{1}{m_{\mathrm{B}}}\right)\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}\leftarrow\mathrm{B}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{B}} \tag{A.25}$$

である．**換算質量**を

$$\mu = \left(\frac{1}{m_{\mathrm{A}}} + \frac{1}{m_{\mathrm{B}}}\right)^{-1} = \frac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} \tag{A.26}$$

で定義すると，式(A.25)は相対距離 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ を使って

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}\leftarrow\mathrm{B}} = \mu \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \tag{A.27}$$

と変形できる．これは相対運動のみを記述する（一体の）運動方程式になっている．このように相対運動を分離できるのは二体系に特有な事情である．

■等速円運動　原点のまわりを質量 μ の質点が等速で半径 r の円運動をしているとすると，位置は $\boldsymbol{r} = (x, y)$ は

$$\boldsymbol{r} = (x, y) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t) \tag{A.28}$$

とすることができる．ここで ω を**角速度**という．速度 $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t) \tag{A.29}$$

であるから，運動エネルギー K は

$$K = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu \boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\mu r^2\omega^2[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] = \frac{1}{2}\mu r^2\omega^2 \tag{A.30}$$

となる．加速度 $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = (-r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\sin\omega t) \tag{A.31}$$

となるので，式(A.3)から質点には，常に中心に向かって

$$F = \mu\, r\omega^2 \tag{A.32}$$

の力が働いていることがわかる．これを**向心力**という．糸におもりをつけて回したときには糸の張力がこれに相当する．一方，質点に注目すると見かけ上，中心から外向きに向心力と同じ大きさの力が働いて, 距離 r を保っているように見える．この外向きの（見かけの）力を**遠心力**という．向心力と遠心力の大きさは，$r\omega = v$ であるから

$$F = \mu\frac{v^2}{r} \tag{A.33}$$

と表すこともできる．

角運動量の大きさは $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ のなす角 θ を使って $mvr\sin\theta$ と表されるが，等速円運動では常に $\theta = \pi/2$ なので mvr になる．

重力ポテンシャルや静電ポテンシャルのように，ポテンシャルの値が中心からの距離の逆数に比例する系で，全エネルギーが負であれば，一般に，運動は

楕円軌道となる．等速円運動はその特殊な場合に相当している．