## Ｂ．偏微分

本文の計算に必要最小限のまとめを行う．記述は全く厳密でないので，数学の教科書でちゃんと勉強のこと．

**■微分**　連続な 1 変数の関数を調べる事を考える．$x_1$ と $x_2$ の区間における関数の変化率は

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \tag{B.1}$$

で与えられる．$x_1$ と $x_2$ を近づければ，その間の点におけるグラフの勾配にだんだん近づく．その極限として，ある点 $x$ での勾配は

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta} \tag{B.2}$$

で求められると考えられる．このようにして求めた $x$ の関数としての各点での勾配を $f(x)$ の**導関数**といい

$$f'(x) \quad \text{あるいは} \quad \frac{df(x)}{dx} \tag{B.3}$$

で表す．また，導関数を求める操作を**微分**（する）という．導関数の値はその点における接線の傾きを表している．初等的な関数（初等関数：べき，三角関数，指数関数，対数関数とこれらの組み合わせ）の微分は初等関数の範囲で必ず実行できる．

導関数をさらに微分した関数を**高階導関数**（**高次導関数**）という．微分された導関数の変化の様子に関する情報をもっている．$n$ 階導関数を

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} \tag{B.4}$$

と表す．

導関数から元の関数を求める操作を不定**積分**（する）という．したがって

$$f(x)=\int f'(x)dx \tag{B.5}$$

である．これに対し，定積分は導関数と $x$ 軸の間の面積を $x$ のある区間（たとえば $x_1$ と $x_2$ の間，など）について求めることに相当する．このため，積分は求積

法ともよばれる．初等関数の積分といえども初等関数の範囲ではできないことが多い．

**■関数の級数展開**　導関数はその点における接線の勾配であるから，$f(x)$は$x_0$のすぐ近くでは

$$f(x_0+\Delta)\approx f(x_0)+\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}\Delta \tag{B.6}$$

のように近似できる（ただし$\Delta$は十分小さい）．二階導関数は導関数の変化の様子を表しているから，これを使って二次関数

$$f(x_0+\Delta)\approx f(x_0)+\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}\Delta+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}\Delta^2 \tag{B.7}$$

を作ると，$x_0$からより遠いところまで近似できる．これをどんどん繰り返すと，どんどん遠くまで表すことができる級数を作ることができる．

$$f(x_0+\Delta)\approx f(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{df^n(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0}\Delta^n \tag{B.8}$$

これを（$x_0$のまわりでの）テーラー展開という．ここで$n!$は$n$の**階乗**であり，

$$n! = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 2\bullet 1 \tag{B.9}$$

である．

展開を行う$x_0$として特別な値をとると，導関数の値が簡単な場合がある．たとえば関数として指数関数（$e^x$）を考え$x_0 = 0$とすると，$(e^x)' = e^x$であるから導関数の値は高次導関数を含め常に1である（$e^0 = 1$）．このことから，指数関数は

$$e^x=\exp(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \tag{B.10}$$

と展開できることがわかる．同じように考えると，$\cos x$と$\sin x$では

$$\cos x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(-1)^n x^{2n} \tag{B.11}$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}(-1)^{n-1}x^{2n-1} \tag{B.12}$$

である．ここで，式(B.10)の$x$に$ix$を代入すると（$i$は虚数単位）

$$e^{ix} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(ix)^n$$
$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)!}(-1)^m x^{2m} + i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)!}(-1)^{m-1} x^{2m-1} \qquad \text{(B.13)}$$

となる．cos $x$ と sin $x$ の展開式と見比べると

$$e^{ix} = \exp(ix) = \cos x + i \sin x \qquad \text{(B.14)}$$

であることがわかる．これを**オイラーの公式**という．

■**偏微分**　関数が複数の変数の関数の場合に，他の変数を固定してある変数について微分を行うことを**偏微分**（する）といい，得られた関数を**偏導関数**という．すなわち，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$に対し

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_1,..,x_i + \Delta,..,x_n) - f(x_1,..,x_i,..,x_n)}{\Delta} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \text{(B.15)}$$

を $x_i$ に関する偏導関数といい，右辺のように表記する．偏微分に関しても（普通は）積の微分，合成関数の微分など通常の演算ができる．

二変数（$x$ と $y$）の関数を例にとると，$x$ と $y$ での偏導関数を使って$(x_0, y_0)$の近くで関数$f(x, y)$を近似することができる．これは，偏微分で接平面を構成することに相当する．

$$f(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) \approx f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \Delta_x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=y_0} \Delta_y \qquad \text{(B.16)}$$

これから，$x$ と $y$ が少し（$dx$ と $dy$）変化したことによる関数値の変化量が

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \qquad \text{(B.17)}$$

と表されることがわかる．これを**全微分**という．